01/11/2018

Σχέσεις

Γενικοί
Διμελείς σχέσεις
Σχέσεις ισοδυναμίας
Σχέσεις (μερικώς) διάταξης

Σχέση: Είναι μια "διαδικασία" που μας επιτρέπει να συσχετίσουμε τα στοιχεία δύο διαφορετικών ή του ίδιου συνόλου.

Παράδειγμα
Αν $A=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ ένα σύνολο από πέντε πρωτοετείς φοιτητές.
$B=\{x, y, z, \omega\}$ το σύνολο των τεσσάρων μαθημάτων του πρώτου εξαμήνου.

Μετά την εξεταστική έχουμε τα εξής αποτελέσματα

α	πέρασε τα	x, y, z
β		y, z
γ		x, y, z, ω
δ		—
ε		y

Με αυτόν τον τρόπο συσχετίζουμε στοιχεία του συνόλου A με στοιχεία του συνόλου B.
Αντί για την παραπάνω γραφική περιγραφή μπορούμε να γράψουμε

$$\sigma=\{(\alpha,x),(\alpha,y),(\alpha,z),(\beta,y),(\beta,z),(\gamma,x),(\gamma,y),(\gamma,z)(\gamma,\omega),(\varepsilon,y)\}.$$

…δηλαδή το πρώτο στοιχείο κάθε διατεταγμένου ζεύγους σχετίζεται με τον φοιτητή και το δεύτερο το μάθημα που πέρασε. Το σ είναι υποσύνολο του $A \times B$.

Ορισμός: Μια σχέση σ από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B, είναι ένα υποσύνολο του $A \times B$. ($\sigma \subseteq A \times B$).
Πολλές φορές το σύνολο σ των διατεταγμένων ζευγών ονομάζεται και "γράφημα της σχέσης σ".

Συμβολισμός:
Αν $\sigma \subseteq A \times B$ είναι μια σχέση και $(x, y) \in \sigma$ λέμε ότι "το x συνδέεται με το y μέσω της σχέσης σ και συμβολίζεται $x \sigma y$".

Δηλαδή $(x, y) \in \sigma \Leftrightarrow x \sigma y$
Επίσης αντί του συμβολισμού $(x, y) \notin \sigma$ γράφουμε $x \not\sigma y$.

Ορισμός:
Έστω A, B δύο σύνολα και $\sigma \subseteq A \times B$ μια σχέση.

Πεδίο Ορισμού: $D(\sigma)$ της σχέσης σ είναι το σύνολο
$$D(\sigma) = \{ \kappa \in A \quad \exists \lambda \in B \text{ ώστε } (\kappa, \lambda) \in \sigma \}$$

Πεδίο Τιμών: $R(\sigma)$ μιας σχέσης σ είναι το σύνολο
$$R(\sigma) = \{ \lambda \in B \quad \exists \kappa \in A \text{ ώστε } (\kappa, \lambda) \in \sigma \}$$

Έτσι πεδίο ορισμού $D(\sigma)$ της σ είναι το σύνολο των στοιχείων του A που είναι πρώτα μέλη διατεταγμένων ζευγών που ανήκουν στη σ.

Ενώ πεδίο τιμών $R(\sigma)$ της σ είναι το σύνολο των στοιχείων του B που είναι δεύτερα μέλη διατεταγμένων ζευγών που ανήκουν στη σ.

Στο προηγούμενο παράδειγμα $D(\sigma) = \{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon\}$ και

$$R(\sigma) = \{x, y, z, \omega\}$$

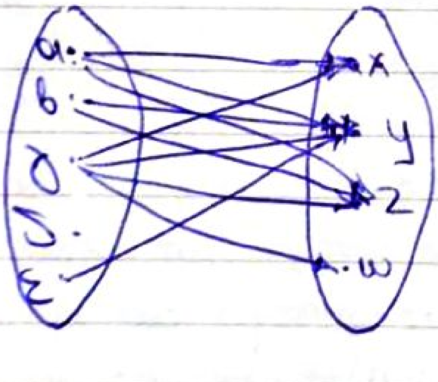
Παρατήρηση:

Αν $\sigma \subseteq A \times B$

$\kappa \notin D(\sigma) \iff \forall \lambda \in B \quad (\kappa, \lambda) \notin \sigma$

$\lambda \in R(\sigma) \iff \forall \kappa \in A \quad (\kappa, \lambda) \notin \sigma$

→ Πολλές φορές μια σχέση παριστάνεται με ένα βελοειδές διάγραμμα



Με ένα βέλος για κάθε διατεταγμένο ζεύγος που ξεκινά από το πρώτο στοιχείο και καταλήγει στο δεύτερο

Αντίστροφη μιας σχέσης

Αν $\sigma \subseteq A \times B$ μια σχέση αντιστρέφοντας τη διάταξη των διατεταγμένων ζευγών που ανήκουν στη σ προκύπτει μια νέα σχέση την οποία συμβολίζουμε σ^{-1}

$\sigma^{-1} \subseteq B \times A$.

Η σ^{-1} ονομάζεται αντίστροφη της σχέσης σ.

$\sigma^{-1} = \{(\kappa,\lambda) : (\kappa,\lambda) \in \sigma\}$

(δηλαδή $(\lambda,\kappa) \in \sigma^{-1} \Leftrightarrow (\kappa,\lambda) \in \sigma$)

Στο προηγούμενο παράδειγμα $\sigma^{-1} = \{(x,\alpha), (y,\alpha), (z,\alpha), (y,\beta), (z,\beta), (x,\gamma), (z,\gamma), (\omega,\gamma), (y,\varepsilon)\}$

Παρατηρήσεις

$D(\sigma^{-1}) = R(\sigma)$

$R(\sigma^{-1}) = D(\sigma)$

$(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$

Περιορισμός μιας σχέσης σ

Αν $\sigma \subseteq A \times B$ μια σχέση

και $X \subseteq A$

τότε ο περιορισμός της σχέσης σ στο X είναι η σχέση $\sigma_X \subseteq X \times B$ που ορίζεται ως $\sigma_X = \sigma \cap (X \times B)$

Στο προηγούμενο παράδειγμα αν $x=\{a,b,\varepsilon\}$ τότε
$\sigma_x = \{(a,x), (a,y), (a,z), (b,y), (b,z), (\varepsilon,y)\}$.

Πρόταση: Έστω $\sigma \subseteq A\times B$, $g \subseteq A\times B$ δύο σχέσεις από το A στο B.

(i) $\sigma \subseteq g \Leftrightarrow \sigma^{-1} \subseteq g^{-1}$
(ii) $D(\sigma)-D(g) \subseteq D(\sigma-g)$ και δεν ισχύει πάντα η ισότητα.
(iii) $R(\sigma)-R(g) \subseteq R(\sigma-g)$ " " " " " "
(iv) $(\sigma\cup g)^{-1} = \sigma^{-1}\cup g^{-1}$

(v) $(\sigma\cap g)^{-1} = \sigma^{-1}\cap g^{-1}$
(vi) $(\sigma - g)^{-1} = \sigma^{-1} - g^{-1}$
(vii) $(\sigma \Delta g)^{-1} = \sigma^{-1}\Delta g^{-1}$

(viii) Αν $A=B$ και $\sigma\subseteq\sigma^{-1}$
τότε $\sigma=\sigma^{-1}$.

Απόδειξη

(i) $\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι $\sigma\subseteq g$
Τότε για τυχόντα x,y
$(x,y)\in\sigma^{-1} \Rightarrow (y,x)\in\sigma \Rightarrow (y,x)\in g \Rightarrow (x,y)\in g^{-1}$.
Άρα $\sigma^{-1}\subseteq g^{-1}$.

$\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $\sigma^{-1}\subseteq g^{-1}$.
Τότε για τυχόντα x,y
$(x,y)\in\sigma \Rightarrow (y,x)\in\sigma^{-1} \Rightarrow (y,x)\in g^{-1} \Rightarrow (x,y)\in g$
Άρα $\sigma\subseteq g$.

ii) $x \in D(\sigma) - D(g)$

$\Rightarrow x \in D(\sigma) \wedge x \notin D(g)$

$\Rightarrow \exists y \in B \ (x,y) \in \sigma \quad \forall y \in B \ (x,y) \notin g$.

$\Rightarrow \exists y \in B [(x,y) \in \sigma \wedge (x,y) \notin g]$.

$\Rightarrow \exists y \in B \ (x,y) \in \sigma - g$

$\Rightarrow x \in D(\sigma - g)$

Άρα $D(\sigma) - D(g) \subseteq D(\sigma - g)$

• Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι δεν ισχύει πάντα η ισότητα

Πχ

$A = \{1, 2\} \qquad B = \{a, b\}$

$\sigma = \{(1, a)\} \qquad g = \{(1, b)\}$

$\sigma - g = \sigma = \{(1, a)\}$

$D(\sigma) = \{1\}, \quad D(g) = \{1\}$

Έχουμε $D(\sigma) - D(g) = \{1\} \setminus \{1\} = \emptyset$

$D(\sigma - g) = \{1\}$

(iii) Όμοια και για το (ii)

(iv) $(x,y) \in (\sigma \cup g)^{-1} \Leftrightarrow (y,x) \in \sigma \cup g$

$\Leftrightarrow (y,x) \in \sigma \vee (y,x) \in g$

$\Leftrightarrow (x,y) \in \sigma^{-1} \vee (x,y) \in g^{-1}$

$\Leftrightarrow (x,y) \in \sigma^{-1} \cup g^{-1}$

Άρα $(\sigma \cup g)^{-1} = \sigma^{-1} \cup g^{-1}$.

(v) $(x,y)\in(\sigma\cap g)^{-1} \Leftrightarrow (y,x)\in\sigma\cap g$

$\Leftrightarrow (y,x)\in\sigma \wedge (y,x)\in g$

$\Leftrightarrow (x,y)\in\sigma^{-1} \wedge (x,y)\in g^{-1}$

$\Leftrightarrow (x,y)\in\sigma^{-1}\cap g^{-1}$.

(vi) $(x,y)\in(\sigma - g)^{-1} \Leftrightarrow (y,x)\in\sigma - g$

$\Leftrightarrow (y,x)\in\sigma \wedge (y,x)\notin g$

$\Leftrightarrow (x,y)\in\sigma^{-1} \wedge (x,y)\notin g^{-1}$

$\Leftrightarrow (x,y)\in\sigma^{-1} - g^{-1}$.

(vii) $(\sigma\triangle g)^{-1} = (\sigma - g)\cup(g-\sigma)^{-1} = (\sigma - g)^{-1}\cup(g-\sigma)^{-1} \overset{(vi)}{=}$

$\sigma^{-1} - g^{-1})\cup(g^{-1}-\sigma^{-1}) = \sigma^{-1}\triangle g^{-1}$.

(viii) Αρκεί ν.δ.ο. ότι $\sigma^{-1}\subseteq\sigma$

Έστω τυχόντα x,y

$(x,y)\in\sigma^{-1} \Rightarrow (y,x)\in\sigma$

$\Rightarrow (y,x)\in\sigma^{-1} \Rightarrow (x,y)\in\sigma$

εφόσον $\sigma\subseteq\sigma^{-1}$

Άρα $\sigma^{-1}\subseteq\sigma$

Έτσι εφόσον $\sigma\subseteq\sigma^{-1}$ και $\sigma^{-1}\subseteq\sigma$ συμπεραίνουμε ότι $\sigma=\sigma^{-1}$.